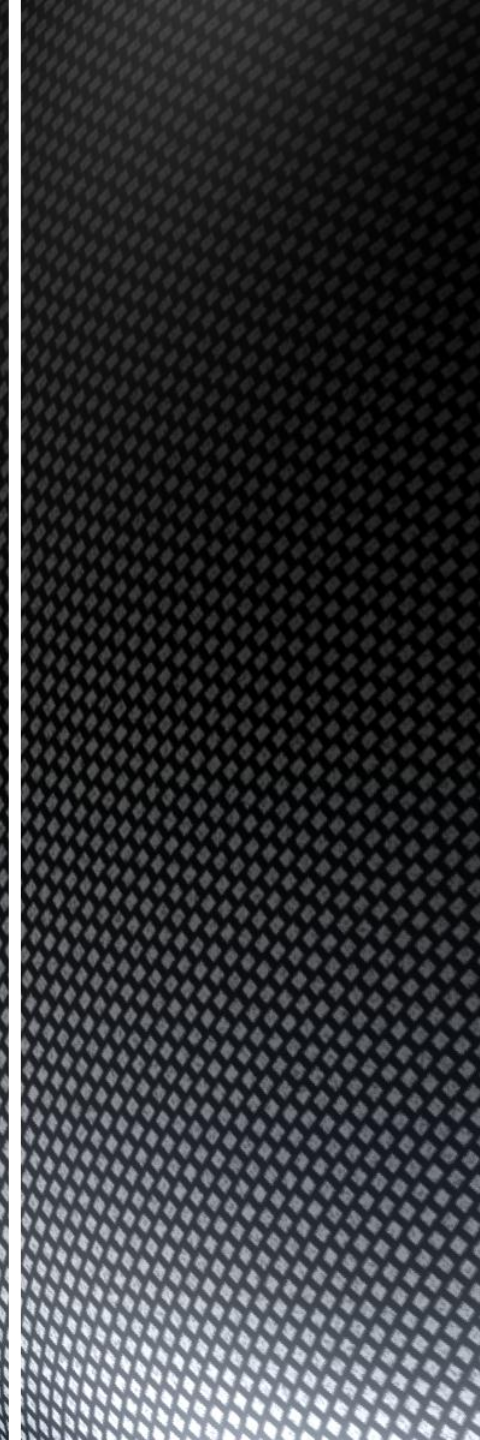


Il problema degli isoperimetri

Maria Teresa Borgato



Il problema isoperimetrico

Consiste nel dimostrare uno dei tre enunciati:

(A)

Tra tutte le curve piane con perimetro fissato, la circonferenza racchiude l'area massima

(B)

Tra tutte le curve piane che delimitano un'area fissata, la circonferenza ha il perimetro minimo

(C)

Per ogni curva piana di area A e perimetro L vale la disuguaglianza (isoperimetrica):

$$4\pi A \leq L^2$$

Dove l'uguaglianza vale solo per la circonferenza.

Infatti:

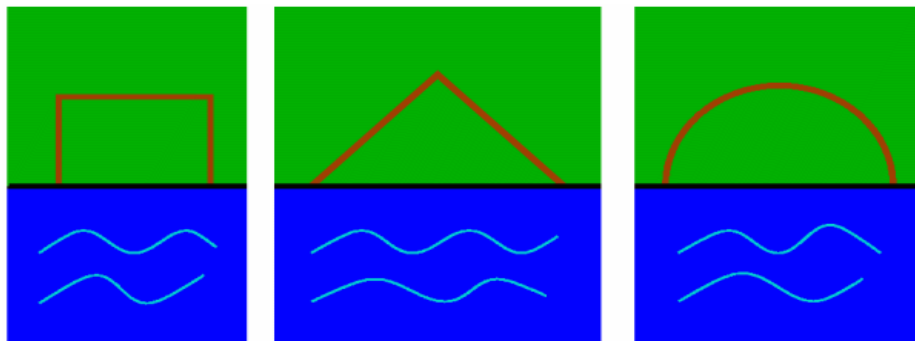
(A), (B) e (C) sono equivalenti

Il problema di Didone



La storia narra che la regina Didone cacciata dalla Fenicia dal fratello Pigmalione (circa 800 A.C.), dopo molte peregrinazioni con i suoi seguaci trovò rifugio in Africa sulla costa libica dove fondò Cartagine.

Ella trovò un accordo con il re delle popolazioni native Giarba per occupare un territorio che potesse essere racchiuso entro una pelle di bue.



*Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai
sorgere la gran cittade e l'alta ròcca
de la nuova Cartago, che dal fatto
Birsa nomossi, per l'astuta merce
che, per fondarla, fêr di tanto sito
quanto cerchiar di bue potesse un tergo.*

(Virgilio, *Eneide*, trad. Annibal Caro: I. 588-594)

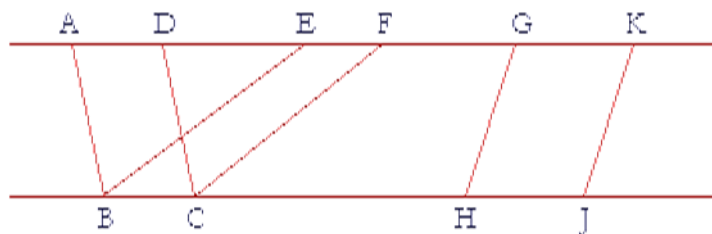
C'è un collegamento diretto tra il problema isoperimetrico e il problema di Didone. Si dimostra infatti che, se F è la figura che risolve il problema isoperimetrico ed r una retta che ne divide il contorno in due parti di uguale lunghezza, ciascuna di queste due regioni risolve il problema di Didone.

Il problema isoperimetrico è noto fin dall'antichità: elegante in se stesso, ha anche una storia affascinante.

Antichi greci

Alcuni problemi isoperimetrici sono stati risolti:

il triangolo equilatero risolve il problema isoperimetrico tra i triangoli e il quadrato risolve il problema isoperimetrico tra i rettangoli (quest'ultimo teorema in Euclide, *Elementi*, 330 A.C.)



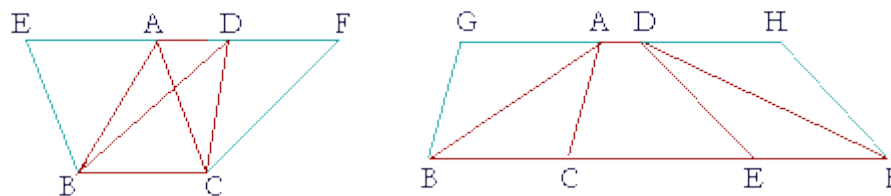
Prop. I, 35-38:

Rettangoli sulla stessa base e tra le stesse parallele sono uguali (equivalenti)

Rettangoli su uguali basi e tra le stesse parallele sono uguali (equivalenti)

Triangoli sulla stessa base e tra le stesse parallele sono uguali (equivalenti)

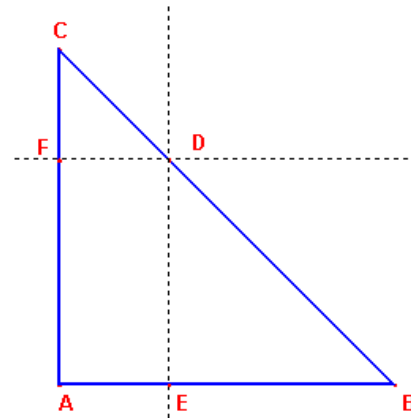
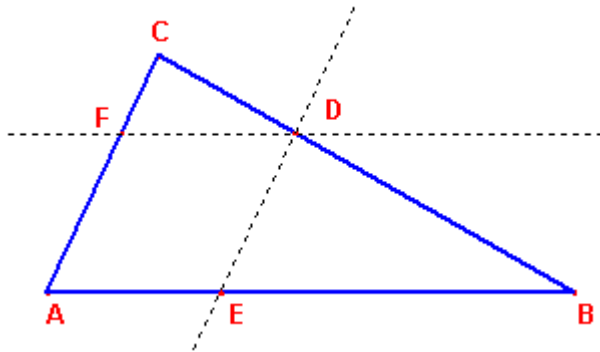
Triangoli su uguali basi e tra le stesse parallele sono uguali (equivalenti)



La proposizione VI, 27 degli *Elementi* di Euclide contiene il teorema

Dato un triangolo ABC, se da un punto D del lato BC si tracciano le parallele ED ad AC, FD ad AB, l'area del parallelogramma AEDF è massima quando D è il punto medio di BC.

Ne consegue che se $AB = AC$ e l'angolo BAC è retto, allora tra tutti i rettangoli di perimetro dato, il quadrato è quello di area massima; proprietà implicita espressa nella prop. II, 5



Prop. II, 5:

Se si divide una retta in parti uguali e disuguali, il rettangolo compreso tra le parti disuguali, insieme col quadrato delle parti comprese fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta

Prop. VI, 27:

Di tutti i parallelogrammi applicati ad una stessa retta e che siano mancanti di parallelogrammi simili e similmente disposti a quello descritto sulla metà della retta, è massimo il parallelogrammo che è applicato alla metà della retta ed è simile al parallelogrammo mancante.

Una affermazione riguardante la proprietà isoperimetrica della circonferenza si trova in Aristotile (384 A.C. - 322 A.C.) [*De Coelo*, 2, p. 287] :

Ora, di tutte le linee che ritornano su se stesse, la linea che limita il cerchio è la più corta

Ma non contiene alcun dettaglio matematico e d'altra parte si tratta di un'opera di Aristotele di filosofia naturale, dedicata ai problemi astronomici e cosmologici secondo le prospettive epistemologiche e filosofiche già affrontate nella *Physica* e nella *Metaphysica* e in particolare, esso contiene nei libri 3-4 un'ampia trattazione di problemi relativi proprio al mondo sublunare.

Gli storici della matematica concordano in generale nel riconoscere che Archimede (287 - 212 A.C.) fosse al corrente del problema isoperimetrico e della sua soluzione; tuttavia non concordano sul fatto che avesse o meno tentato una dimostrazione.

Zenodorus (c. 200 - c. 140 A.C.) scrisse un trattato ora perduto *Sulle figure isometriche* e anche *Tolomeo* (c. 90 - c. 168 D.C.). Ne riferisce **Teone di Alessandria** (c. 335 - c. 405 D.C.) nel suo commentario a Tolomeo.

A-Kindi, matematico arabo del Nono secolo scrisse un trattato *Sulle figure isoperimetriche e le Isepiemie*, cioè i solidi di uguale superficie.

Al-Hasan ibn al-Haytham (965 - c. 1039) scrisse un trattato ora perduto e **Abu Ja'far al-Khazin**, commentando l'*Almagesto* di Tolomeo nel decimo secolo, generalizzò i precedenti lavori.

Johannes de Sacrobosco (John of Holywood, c. 1195 - c. 1256 AD), studioso e astronomo inglese, scrisse il celebre *Tractatus de Sphaera*. Un commento a quest'opera, che tratta particolarmente della isometria, si trova nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* di **Galileo** (1638).

Il Problema degli isoperimetri in Pappo, *Collezioni Matematiche*, Libro V

Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversae et commentariis illustratae

1660, Bononiae, ex Typographia HH. de Duccijs

<http://mathematica.sns.it/opere/132/#sthash.yQ7zkTun.dpuf>

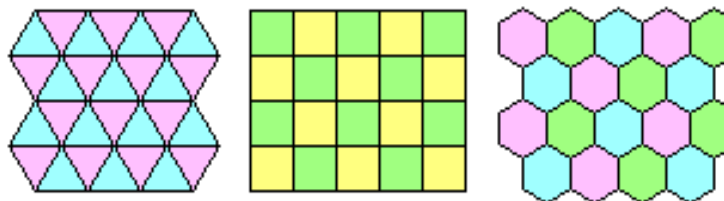
Il libro V delle Collezioni Matematiche di Pappo è dedicato ai problemi di isoperimetria, ossia al confronto delle aree delle figure che hanno eguale perimetro e dei volume dei solidi che hanno superfici di uguale area.

Il libro V si apre con un celebre passaggio sulle api e le proprietà di massimo-minimo delle celle dei loro alveari.

Si tratta di un passo affascinante noto come “la sagacia delle api”.



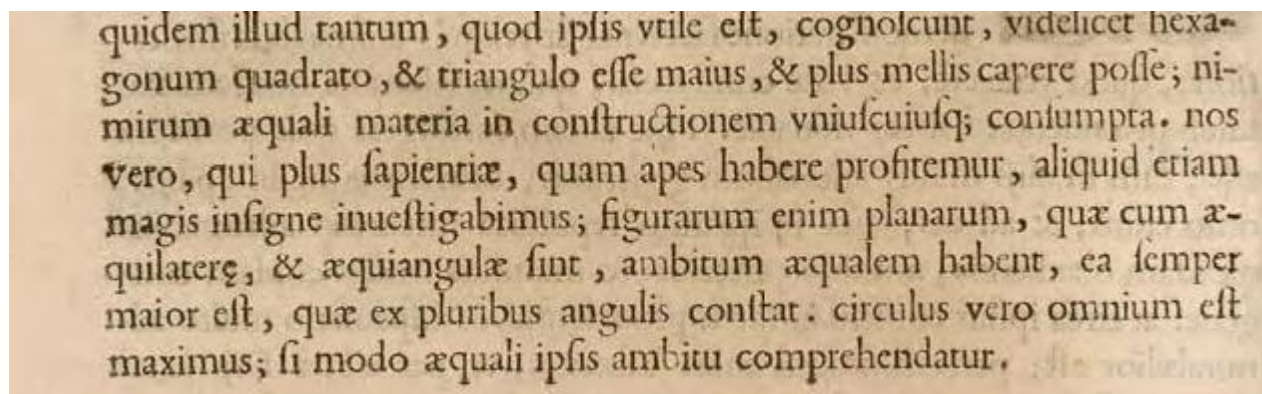
Possibili tassellazioni del piano con poligoni regolari:



La forma esagonale è perfetta per economizzare lavoro e cera.

Poi Pappo enuncia il problema isoperimetrico che intende investigare:

“nos vero, quis plus sapientiae, quam apes habere profitemur, aliquid etiam magis insigne investigabimus: figurarum enim planarum, quae cum aequilaterae, et aequiangularae sint, ambitum aequalem habent, ea semper maior est, quae ex pluribus angulis constat; circulus vero omnium est maximus; si modo aequali ipsis ambitu comprehendatur.”



Rifacendosi probabilmente al trattato di Zenodoro, il V libro contiene la dimostrazione che il cerchio possiede, per un dato perimetro, un'area maggiore di qualsiasi poligono regolare.

Altri risultati sono:

1. *tra i poligoni regolari, a parità di perimetro, quello che ha area più grande è quello che ha il maggior numero di lati;*
2. *tra tutti i triangoli di assegnato perimetro, con la stessa base, quello che ha area maggiore è l'equilatero;*
3. *tra i poligoni, quelli con area maggiore sono le figure convesse, in particolare i poligoni regolari.*

Vi è anche l'affermazione che tra tutte le figure solide con uguale superficie la sfera possiede il massimo volume, ma ne viene data solo una giustificazione incompleta.

Metodo variazionale. Eulero e Lagrange

Euler, L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti*, Lausannae and Genevae, 1744. (E65A: *Opera Omnia*).

Caput 5 *Methodus, inter omnes curvas eadem proprietate praeditas, inveniendi eam quae maximi minimive proprietate gaudeat.* P. 193 exemplum III:

EXEMPLUM III.

43. *Inter omnes curvas ejusdem longitudinis puncta A & M jungentes, invenire eam quae, cum rectis AC & MC ad punctum fixum C ductis, maximam vel minimam comprehendat aream ACM.* Fig. 7



In termini moderni, Eulero vuole trovare un estremales del funzionale:

$$F(y) = \int_a^b f(x; y(x); y'(x)) dx \quad (1)$$

Soggetto alle condizioni: $y(a) = \alpha$ e $y(b) = \beta$.

Supposto che f sia continua con le derivate prime e seconde e y differenziabile in $[a; b]$.

Eulero nel 1744 e poi Lagrange nel 1759, in modo diverso, dimostrarono che una soluzione del problema (1) precedente deve soddisfare la cosiddetta equazione di Eulero-Lagrange :

$$f_y(x; y; y') - \frac{df_{y'}(x; y; y')}{dx} = 0; y(a) = \alpha \text{ e } y(b) = \beta \quad (2)$$

Le soluzioni delle equazione (2) sono detti estremali del problema (1).

Nel capitolo V Eulero tratta i funzionali che, in aggiunta alle condizioni al contorno (1), sono soggetti a vincoli: ossia il problema di minimizzare o massimizzare il funzionale:

$$F(y) = \int_a^b f(x; y(x); y'(x)) dx$$

Con le condizioni:

$$G(y) = \int_a^b g(x; y(x); y'(x)) dx = l$$

$$y(a) = \alpha \text{ e } y(b) = \beta \quad (3)$$

Nel caso in cui F sia l'area e G la lunghezza dell'arco, il problema (3) è il problema isoperimetrico. Storicamente, il problema (3) è stato chiamato problema isoperimetrico generalizzato e G vincolo isoperimetrico generalizzato.

Eulero segue la **regola del moltiplicatore**:

Se y^* è una soluzione del problema (3) allora esiste un moltiplicatore associato λ tale che y^* è un estremale del funzionale ausiliario:

$$L(y) = F(y) + \lambda G(y)$$

$$y(a) = \alpha \text{ e } y(b) = \beta$$

Con le condizioni:

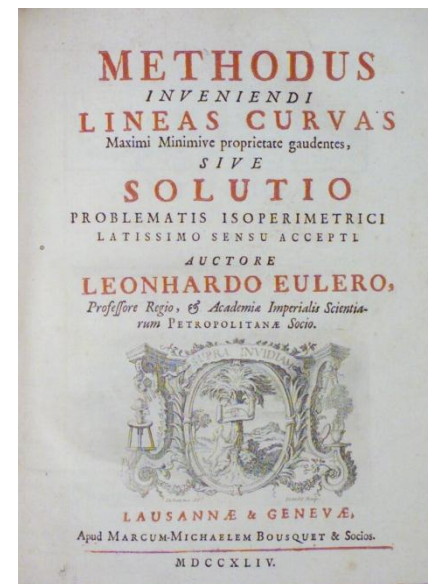
Allora il problema di Didone è posto nella forma di massimizzare il funzionale:

$$\int_{-a}^a y(x) dx$$

Con le condizioni :

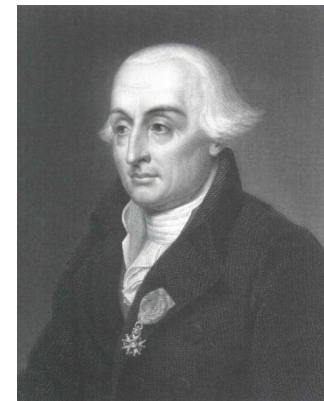
$$\int_{-a}^a \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = a\pi$$

$$y(-a) = y(a) = 0$$



Eulero osserva che il semicerchio: $y_c(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, -a \leq x \leq a$,
è l'unico estremale del problema ausiliario, per $\lambda = -a$.

Segue anche da questa procedura, che cercare un estremale di $F(y)$ con la condizione $G(y) = l$ è come cercare un estremale di $G(y)$ con la condizione $F(y) = A$, poiché entrambi i problemi danno origine al medesimo funzionale ausiliario, con moltiplicatori inversi $(\lambda, \frac{1}{\lambda})$ (*problemi inversi*).



Nel 1756 Lagrange comunicava ad Eulero le sue ricerche, che partendo dal lavoro di Eulero sugli isoperimetri, sviluppava un calcolo tutto analitico e molto più generale che sarà chiamato il *calcolo delle variazioni*.

Lagrange, J. L. *Recherches sur la méthode de maximis et minimis*, Miscellanea Taurinensia, I p. II (1759), pp. 18-32.

Tuttavia, la condizione espressa tramite la regola dei moltiplicatori, come in generale l'equazione di Eulero Lagrange, esprimono solo *una condizione necessaria* e non sufficiente affinché una curva sia minimale, e in particolare, affinché il cerchio sia la soluzione del problema isoperimetrico.

Circa 135 anni più tardi Weierstrass costruì la sua teoria in grado di garantire la sufficienza per i problemi del calcolo delle variazioni e la applicò per ottenere quella che è oggi considerata la prima prova completa che il cerchio risolve il problema isoperimetrico.

Una dimostrazione sintetica: Jacob Steiner

Un contributo essenziale nella direzione di una dimostrazione rigorosa fu data da Jacob Steiner (1796-1863). Essa si colloca in un periodo in cui, dopo che nel secolo precedente erano i metodi analitici a dominare la ricerca matematica, venivano riscoperti i metodi sintetici che proprio Steiner contribuì a portare a livelli di grande generalità.

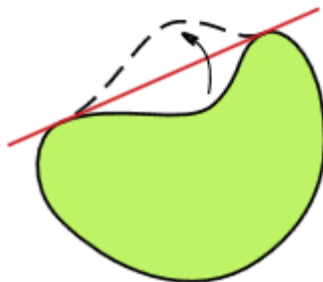
Nel 1838, mediante un procedimento puramente sintetico, poi chiamato *simmetrizzazione di Steiner*, egli mostrò che se la soluzione esiste, allora deve essere un cerchio.

La sua dimostrazione era dunque incompleta (come osservò Dirichlet) per quanto riguardava l'esistenza della soluzione e fu successivamente completata da Carathéodory.

Idee base: **Convessità e simmetria**

Steiner inizia con alcune costruzioni geometriche facilmente comprensibili; per esempio, si può mostrare che qualsiasi curva chiusa che includa una regione non completamente **convessa** può essere modificata includendo un'area maggiore, "girando" le aree concave per farle diventare convesse.

Si può inoltre mostrare che ogni curva chiusa che non sia simmetrica può essere deformata così da includere un'area maggiore. La forma che è perfettamente convessa e simmetrica è il cerchio, anche se questa non è una dimostrazione rigorosa del teorema isoperimetrico



Steiner osserva che:

(1) Qualunque triangolo inscritto in un cerchio con un diametro uguale alla sua ipotenusa ha un angolo retto.

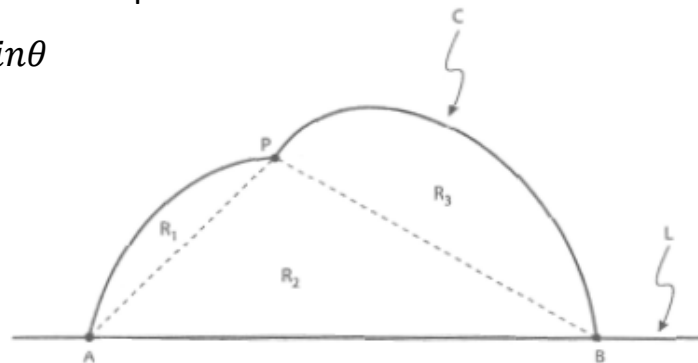
(2) I triangoli rettangoli hanno area maggiore di qualunque triangolo con lati uguali ai suoi cateti.

Questo ultimo punto è ovvio, poiché dati i lati X e Y con l'angolo θ compreso:

$$A = \frac{1}{2}XY \sin\theta$$

Che è massimizzata per $\sin\theta = 1$.

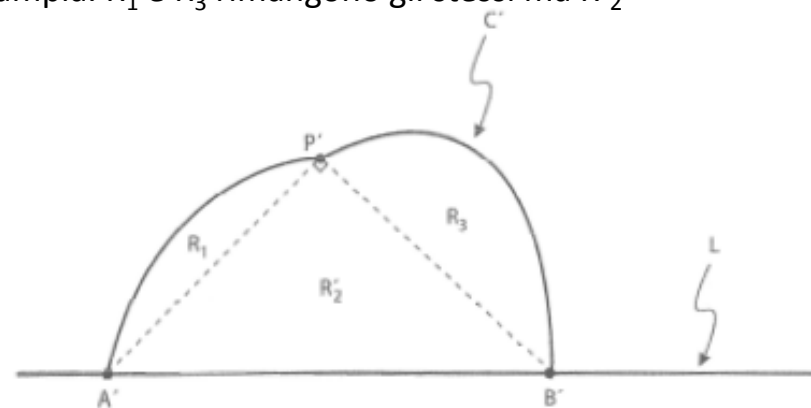
Supponiamo ora di avere la seguente curva iniziale:



La simmetrizzazione di Steiner funziona scegliendo un punto P e formando un triangolo tra questo punto e gli estremi sulla linea del semicerchio. Come si vede sopra, AP , PB , AB formano un triangolo. Muoviamo quindi i punti A e B sulla linea in modo che $\angle APB$ sia un angolo retto. Facendo questo si conservano le lunghezze di AB e BP .

Così risulterà un nuovo triangolo maggiore di quello precedente.

Se noi dividiamo l'area nella parte interna al triangolo, R_2 , e quindi l'area nelle altre parti della curva, R_1 e R_3 , l'area limitata dalla curva dopo la simmetrizzazione è più ampia. R_1 e R_3 rimangono gli stessi ma $R'_2 > R_2$ così la somma delle aree è maggiore.



Col crescere del numero delle iterazioni la curva tende verso un cerchio che dovrebbe essere il risultato di infinite iterazioni. In ciascuna iterazione l'area limitata dalla curva non può decrescere.

Così si conclude che il cerchio ha l'area interna massima per il suo perimetro fissato.

Gergonne?



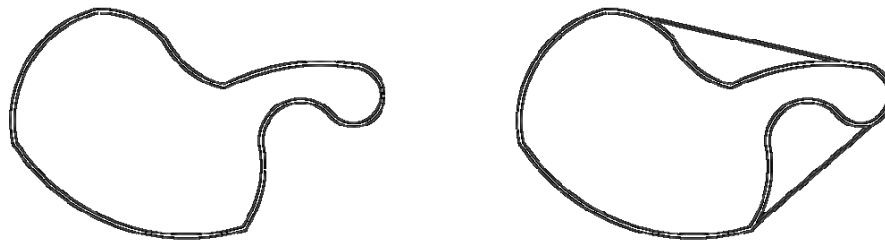
GÉOMÉTRIE.

*Recherche de la surface plane de moindre contour ,
entre toutes celles de même étendue , et du corps
de moindre surface , entre tous ceux de même vo-
lume ;*

Par un A B O N N É.

GERGONNE
~~~~~

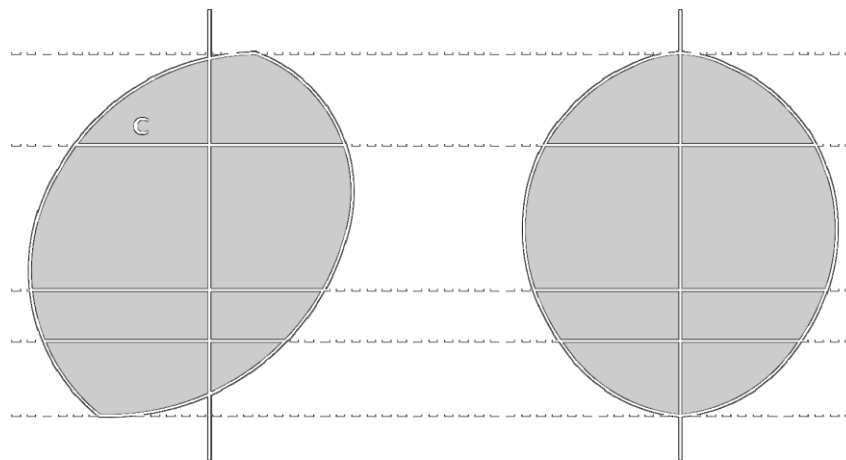
Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), pubblicò un articolo anonimo sulla celebre rivista da lui fondata: gli *Annales des Mathématiques Pures et Appliquées*, noti come gli Annali di Gergonne, per l'anno 1813-14 (vol. 4. pp338-343). Esso precorre il risultato di Steiner



L'insieme deve essere convesso, altrimenti si potrebbe considerare il suo inviluppo convesso, che ha maggiore area e perimetro minore.



## Simmetrizzazione secondo Gergonne



**Lemma.** *Tra tutti i trapezi piani con due lati paralleli aventi la stessa distanza tra loro, quello per cui la somma dei lati non paralleli è minima è quello in cui la linea retta che congiunge i punti medi dei lati paralleli è perpendicolare ad entrambi (trapezio isoscele)*

**Problema 1.** Tra tutte le superfici piane di data area, qual'è quella di perimetro minimo?

Supponiamo che  $S$  sia una superficie di perimetro minimo tra quelle aventi una data area. Prendiamo una qualunque corda  $C$  in  $S$  e una linea  $L$  perpendicolare a  $C$  nel suo punto di mezzo. Se noi prendiamo un infinito numero di corde infinitamente vicine una all'altra e tutte parallele a  $C$ ,  $S$  risulta divisa in elementi che possono essere considerati trapezi elementari i cui lati non paralleli insieme formano il perimetro di  $S$ . Non tutti questi trapezi avranno i punti medi dei loro lati paralleli sulla linea  $L$ . In questi casi, possiamo muovere ciascuno di questi lati, perpendicolarmente a  $L$ , fino a che i loro punti medi siano situati su questa linea; e lo stesso accade con i trapezi elementari.

Questa trasformazione non ha modificato l'area di  $S$ , ma ha ridotto il suo contorno, per cui si conclude che il perimetro non poteva essere minimo.



La caratteristica della superficie di perimetro minimo è allora, che tutte le corde perpendicolari a  $L$  hanno i loro punti medi su questa linea, in altri termini, che  $L$  deve essere un diametro principale; e così la direzione di  $L$  è arbitraria. Si conclude necessariamente, che tutti i diametri sono diametri principali, proprietà esclusiva del cerchio.

*Corollario. Tra tutte le superfici piane con lo stesso perimetro, il cerchio è quello con la massima area.*

Dim. Siano  $C$  un cerchio e  $S$  una superficie con lo stesso perimetro  $p$ . Allora possiamo costruire un cerchio  $C_0$  con la stessa area di  $S$ , e sia  $p'$  il suo perimetro.

Dal ragionamento precedente, otteniamo che  $p' < p$ , da cui risulta  $C_0 < C$  e poiché  $C_0 = S$ , risulta  $S < C$ .



## La proprietà isoperimetrica della sfera

In tre dimensioni il problema isoperimetrico ha come soluzione la sfera: la difficoltà della trattazione matematica, che è notevole, dipende dalla classe degli insiemi che si considerano, perché in questa classe non è detto che ci sia un minimo. Per essere sicuri dell'esistenza del minimo bisogna ammettere una classe di insiemi irregolari per la quale Ennio De Giorgi negli anni '50 diede la definizione di **perimetro**



Questa classe di insiemi può essere descritta come quella per cui la funzione caratteristica ha derivate misure nel senso delle distribuzioni.

Questi insiemi sono la classe più generale tra quelle per le quali è possibile scrivere le formula di Gauss-Green

Il loro studio fu iniziato da Renato Caccioppoli e condotto ad un alto livello di perfezione da De Giorgi che ha dimostrato la proprietà isoperimetrica della sfera sia in tre che in un numero maggiore di dimensioni, nella classe degli insiemi di perimetro finito:

*E. De Giorgi, Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita, Att. Acc. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I, 8 (1958) pp. 33-44.*