

UFFICIO X  
AMBITO TERRITORIALE  
PER LA PROVINCIA DI FERRARA



LICEO "L. ARIOSTO"  
PRESIDIO M@TABEL

# *AGORÀ MATEMATICO*



# GEOMETRIA DEL PIANO

## Isoperimetria ed equiestensione

*Quadro teorico e prassi didattica per un apprendimento-insegnamento integrato*

**Giuliana Gnani**  
**Dipartimento di Matematica -Universita' di Ferrara**

# FIGURE, GRANDEZZE E MISURA

Quadro teorico relativo ai poligoni:

- Segmenti e poligoni
- In particolare per i poligoni l'equiestensione, la congruenza , l'equiscomponibilità , l'isoperimetria e loro relazioni
- Misura tramite la Teoria delle grandezze

# VERSO MISURA DEL PERIMETRO E AREA

Partire dai concetti geometrici

- dal concetto di linea
- dal concetto di estensione di una figura piana
- relazioni tra equiestensione e isoperimetria

Per arrivare alla misura

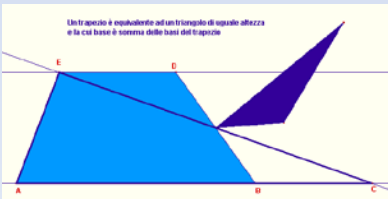
Osservazioni: base e altezza sono lati cioè segmenti

Perimetro è quindi il segmento somma dei lati(non per tutti gli autori)

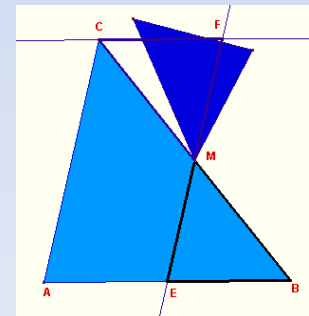
Area misura l'estensione di una figura

# POSSIBILE PERCORSO

- Dato un poligono di  $n$  lati, si può determinare un triangolo equiscomposto ad esso
- Dato un triangolo si può costruire un triangolo ad esso equiscomposto di fissata base (o altezza)
- Dato un triangolo si può costruire un rettangolo di fissata base(o altezza) equiscomposto ad esso



Giuliana Gnani, isoperimetria ed  
equiestensione, 6 marzo 2013



# TEOREMA DI BOLYAI-GERWIN

## PER I POLIGONI

- Due poligoni sono equiestesi se e soltanto se sono equiscomponibili
- Lemma. Se due rettangoli equivalenti hanno ugual base(o altezza), allora hanno la stessa altezza(o base)

**E nello spazio**, vale un teorema analogo?

Per i prismi vale , non per le piramidi

(Teorema di Dehn)

# EQUIESTENSIONE, EQUISCOMPONIBILITÀ CONGRUENZA



Didattica della Matematica

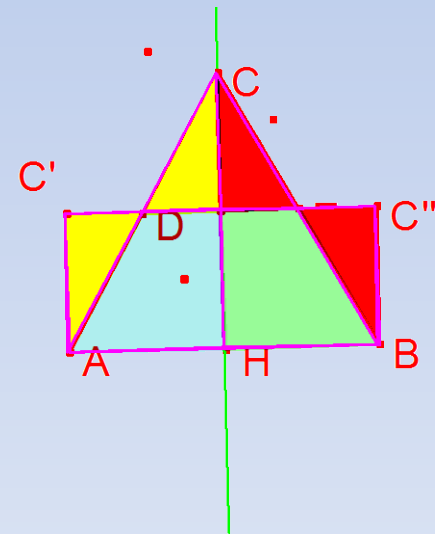
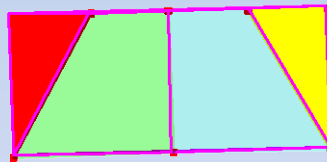
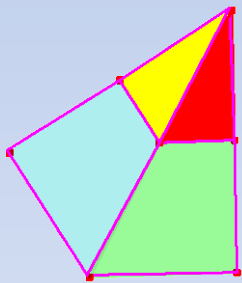
## **Equiscomponibilità delle figure piane**





# PROPRIETÀ E RELAZIONI

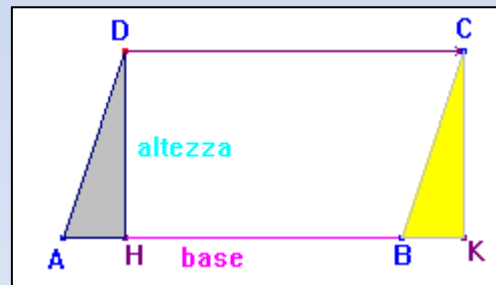
- La congruenza, la equiscomponibilità , la equiestensione e la isoperimetria tra figure piane sono **relazioni di equivalenza**





# Dalla equiscomposizione alle formule delle aree

- Triangoli di ugual base e uguale altezza
- Triangolo e parallelogramma di uguale altezza e base doppia dell'altro
- Parallelogrammi di ugual base e uguale altezza
- Rettangolo e parallelogramma di ugual base e altezza

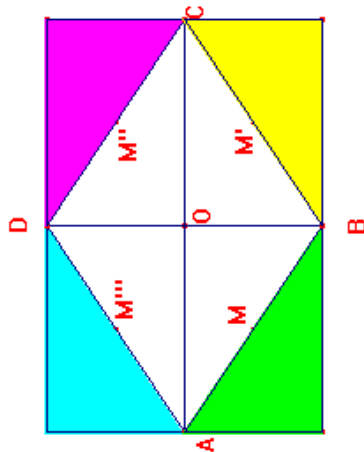


# Dalla equiscomponibilità dei poligoni al rettangolo, alla formula

alfa: 180,00

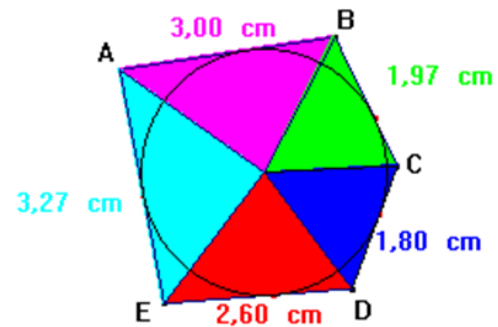
deve essere  $PZ : PQ = \alpha : 180$

$PZ = 4,82$  cm     $PQ = 4,82$  cm     $ZQ$

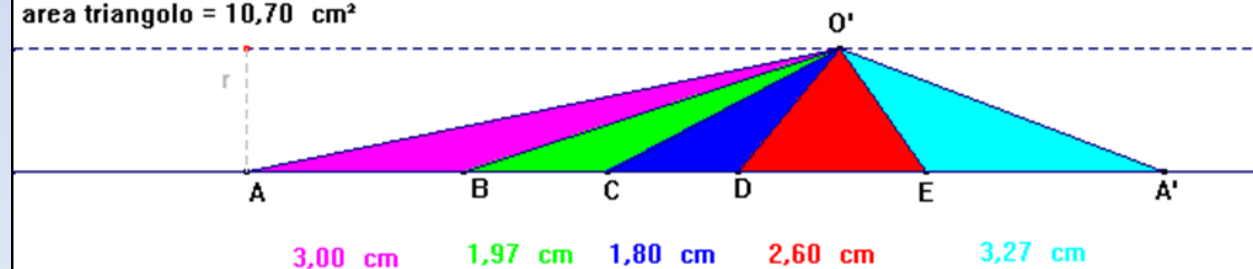


raggio circonferenza inscritta = 1,69 cm

area poligono = 10,70 cm<sup>2</sup>

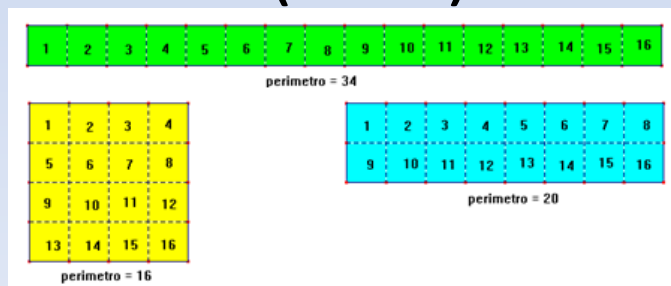


area triangolo = 10,70 cm<sup>2</sup>



# PERIMETRO E AREA A CONFRONTO

- Se due rettangoli hanno lo stesso perimetro allora hanno la stessa estensione(area)?
- Se due rettangoli hanno la stessa estensione(area )allora hanno lo stesso perimetro?
- Se il perimetro di un rettangolo diminuisce anche l'estensione(area) diminuisce?



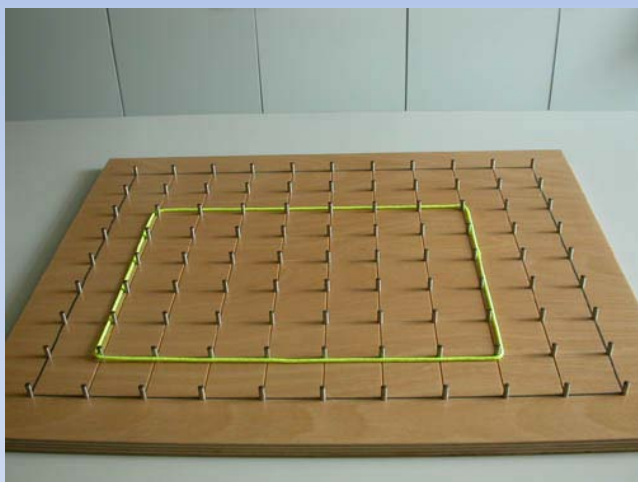
# INSIEME DI RETTANGOLI EQUIVALENTI



- Conclusioni di un lavoro di gruppo(Bozzolo)  
*Fra tutti i rettangoli di uguale area il quadrato,  
quando c'è, è quello di perimetro minimo*

# PROPRIETÀ ISOPERIMETRICA DEL QUADRATO

Se, invece di considerare tutte le figure piane, ci si limita a considerare solo i rettangoli, qual è la soluzione del problema ?



È facile verificare, attraverso alcuni esempi, che

**Fra tutti i rettangoli di perimetro fissato, il quadrato è quello di area massima.**

Verifichiamolo con Cabri - Géomètre



Semiperimetro= 6

Perimetro: 12,00

Base=3,27 cm

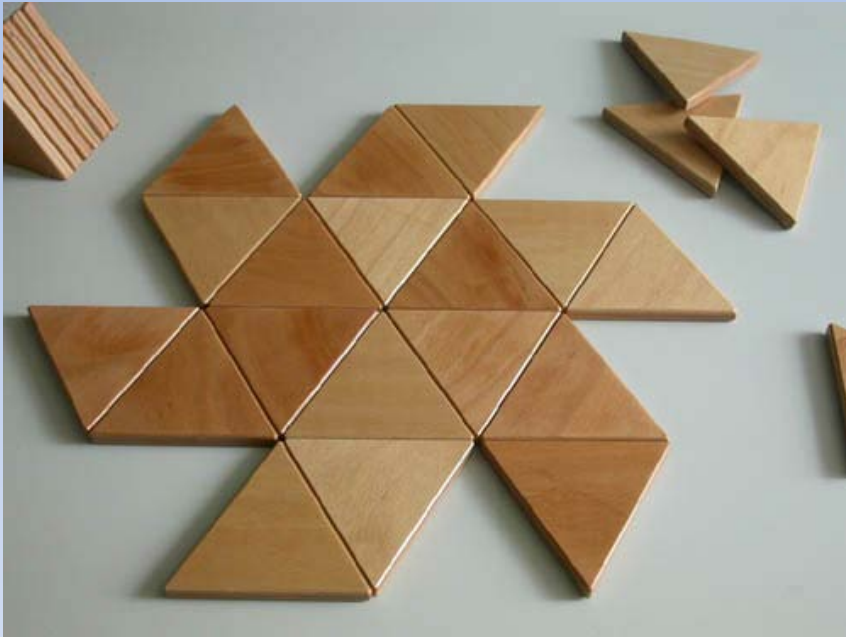
Altezza=2,73 cm

Area=8,92 cm<sup>2</sup>



# PROPRIETÀ ISOPERIMETRICA

## MOSTRA MATEMILANO



Utilizzando delle tessere a forma di triangolo equilatero, si può provare a risolvere la versione "simmetrica" dello stesso problema:

**Tra tutte le figure che hanno una determinata area, qual è quella di perimetro minore?**

**Le soluzioni sembrano rispondere ad un ipotetico "principio della maggior circolarità possibile".**

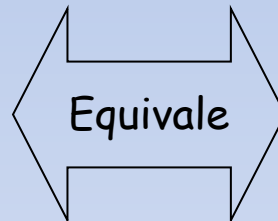
# PROPRIETÀ ISOPERIMETRICA

Abbiamo verificato che tra tutti i rettangoli di perimetro fissato, il quadrato è quello con area massima. Questo fatto si può anche esprimere in forma duale:

**Fra tutti i rettangoli di area fissata, il quadrato ha perimetro minimo**

In generale vale la seguente proprietà:

**Fra tutti i poligoni di un numero fissato di lati di ugual area, il poligono regolare è quello che ha perimetro minimo.**



**Fra tutti i poligoni di un numero fissato di lati di ugual perimetro, il poligono regolare è quello che ha area massima.**

## Principio di dualità (o di reciprocità)

Data una corrispondenza tra due variabili  $x$ ,  $y$  se per ogni valore  $a$  di  $x$  i valori corrispondenti di  $y$  ammettono un massimo (o un minimo)  $b$  che cresce al crescere di  $a$ , allora  $a$  è il minimo (o rispettivamente il massimo) dei valori di  $x$  che corrispondono ad  $y = b$

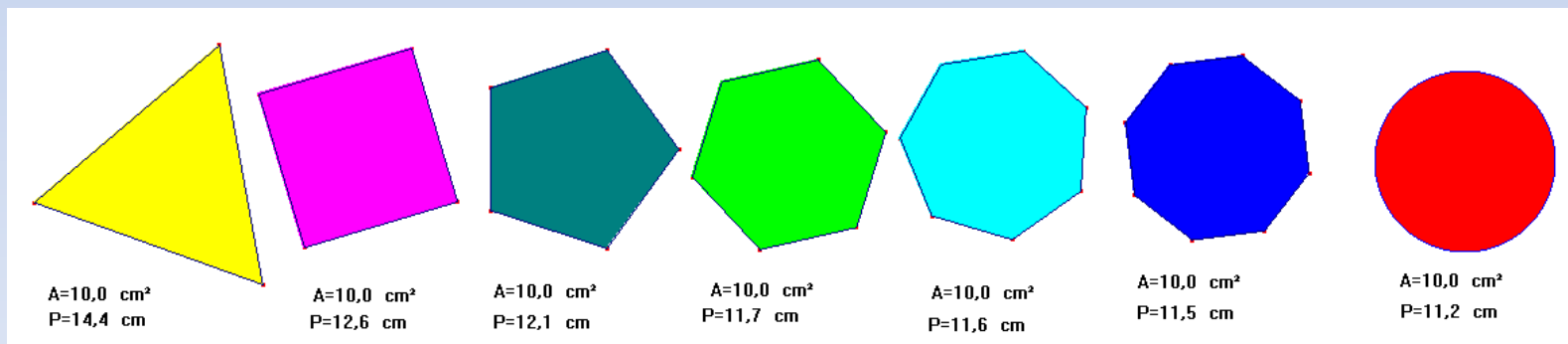
# PROPRIETÀ ISOPERIMETRICA

Abbiamo visto che a parità di area e di numero di lati, i poligoni regolari sono quelli che rendono minimo il perimetro. Ci chiediamo ora:

*A parità solo di area, potendo utilizzare un numero qualsiasi di lati, qual'è il poligono con perimetro minimo?*

Per quanto osservato precedentemente, possiamo limitarci a considerare solo i poligoni regolari. Con Cabri – Géomètre, si può verificare che a parità di area, più lati ha il poligono regolare, meno misura il suo perimetro.

Questo ci conduce intuitivamente al concetto di numero infinito di lati, verso il concetto di approssimazione della **circonferenza**.





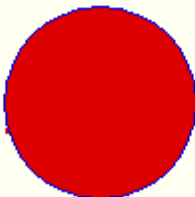
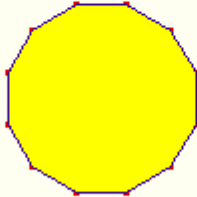
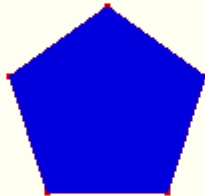
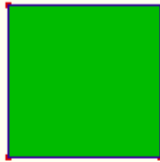
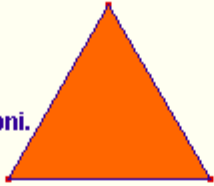
# POLIGONI REGOLARI ISOPERIMETRICI ALL'AUMENTARE DEL NUMERO DEI LATI L'AREA AUMENTA

I poligoni sono isoperimetrici.

Il loro perimetro è rappresentato dal segmento AB

L'area aumenta con l'aumentare del numero dei lati dei poligoni.

A B



Area triangolo =  $3,08 \text{ cm}^2$

Area quadrato =  $4,00 \text{ cm}^2$

Area pentagono =  $4,40 \text{ cm}^2$

Area dodecagono =  $4,98 \text{ cm}^2$

Area cerchio =  $5,09 \text{ cm}^2$

# RELAZIONE TRA AREA E SEMIPERIMETRO

Fissati  $p$  e  $A$  numeri reali positivi, esiste un rettangolo di semiperimetro  $p$  e area  $A$ ? oppure esistono condizioni di esistenza?

1. per via analitica considerando i grafici corrispondenti alle equazioni

$$x+y=p \quad xy=A$$

2. per via algebrica passando alla risoluzione della equazione di secondo grado

$$t^2-pt+A=0$$

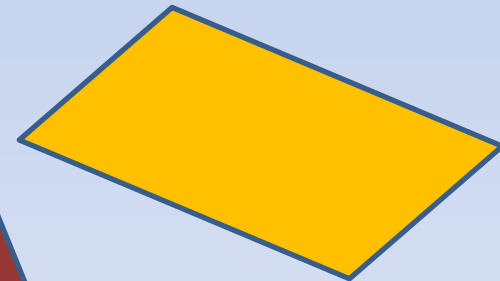
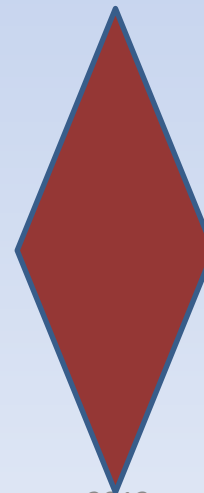
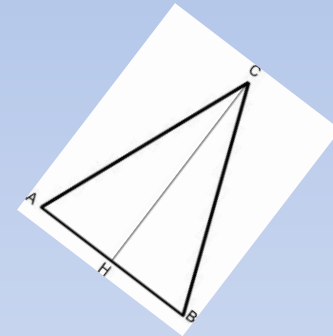
3. per via grafica, dal confronto tra ramo di iperbole e segmento vale la relazione

$$A \leq (p^2/4) \text{ ovvero } p \geq \sqrt{2A}$$

# DIFFICOLTÀ- NODI CONCETTUALI MISCONCEZIONI

I processi di insegnamento-apprendimento e  
misconcezioni

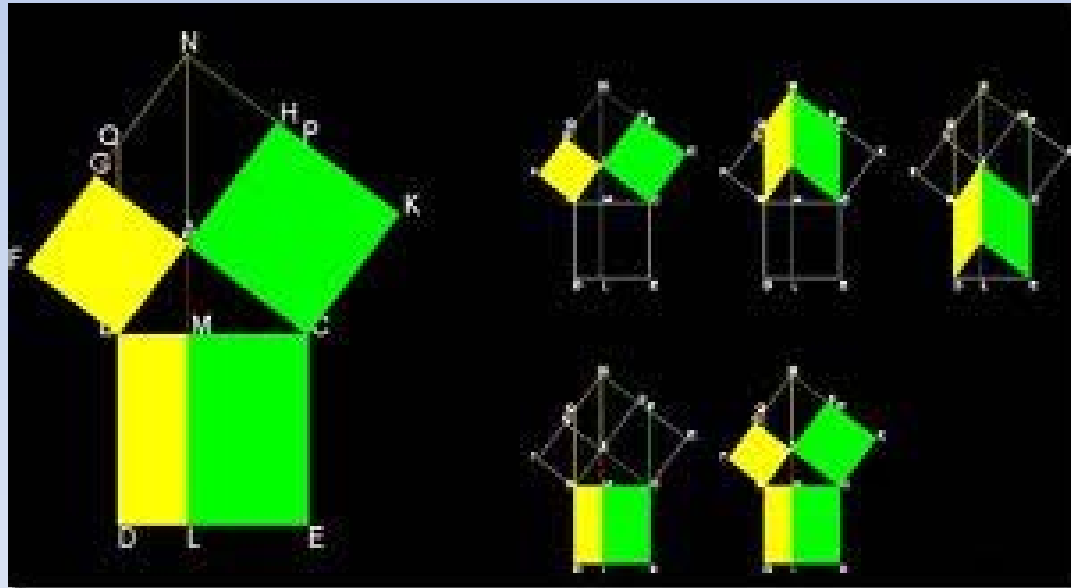
- Rappresentazioni di figure
- Definizioni
- Aspetti linguistici



# VERSO LA DIMOSTRAZIONE

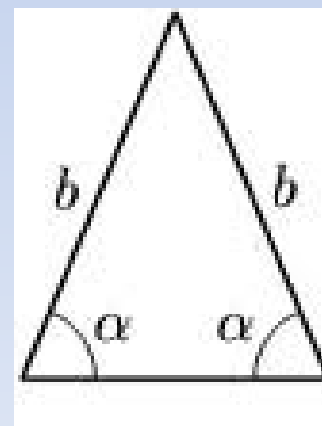
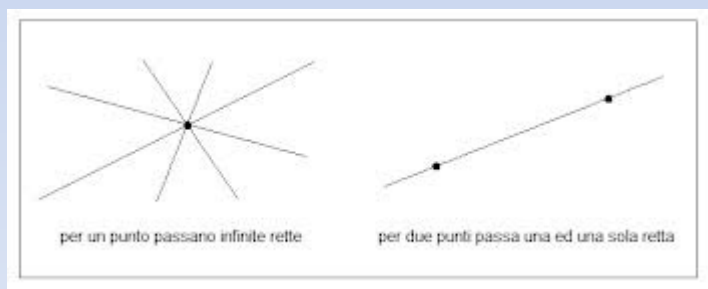
Esplorare, congetturare, verificare, argomentare

- Attività didattiche



# DEFINIZIONI , TEOREMI E POSTULATI

1. Un triangolo si dice isoscele se ha due lati uguali
2. Ogni rettangolo ha le diagonali congruenti
3. Per due punti distinti passa una ed una sola retta



# COME DARE UNA DEFINIZIONE

- Un triangolo equilatero è isoscele?
- Un quadrato è un rettangolo?
- Un quadrato è un rombo?
- Un rombo è un parallelogramma?
- E un rettangolo è un parallelogramma?
- E un parallelogramma è un trapezio?

# TEOREMA DIMOSTRAZIONI

Cosa è una dimostrazione? Come si attua?

1. Dimostrazioni dirette
2. Dimostrazioni indirette(passaggio alla contronominale)
3. Dimostrazione per assurdo

*Vediamo alcuni esempi:*

1. Se  $n$  è un numero pari allora  $n^2$  è pari
2. Se  $n^2$  è pari allora  $n$  è pari
3. Due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro

# ALTRI ESEMPI

## Definizione nel piano di rette perpendicolari?

1. Nel piano due rette sono perpendicolari se formano un angolo di  $90^\circ$  gradi
2. Due rette del piano sono perpendicolari se formano angoli uguali
3. Due rette sono perpendicolari se formano un angolo retto



# ALCUNI RICHIAMI

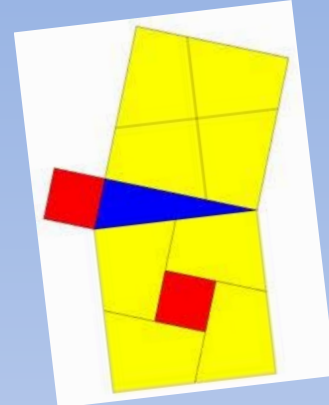
Consideriamo una proposizione del tipo

**$A$  implica  $B$**   
***Proposizione diretta***

A partire da questa possiamo considerare le seguenti altre proposizioni:

- (non  **$A$** )implica (non  **$B$** ) detta ***proposizione contraria*** di  **$A$  implica  $B$**  .
- **$B$  implica  $A$**  detta ***proposizione inversa*** di  **$A$  implica  $B$**  .
- (non  **$B$**  )implica (non  **$A$** ) detta ***proposizione contronominale*** di  **$A$  implica  $B$**  .

# ESERCIZIO



1. Il triangolo i cui lati misurano 3,4,6 è rettangolo?

Poiché  $6^2 \neq 3^2 + 4^2$  il triangolo non è rettangolo

2. Il triangolo i cui lati misurano 3,4,5 è rettangolo?

Poiché  $5^2 = 3^2 + 4^2$  il triangolo è rettangolo

*Quale teorema va applicato?*

1. Teorema di Pitagora nella forma contronominale

2. Teorema inverso del teorema di Pitagora

# OSSERVAZIONI

Nella formula seguente si opera una abbreviazione che è in uso ma che è in realtà non esatta

*Area del rettangolo = base x altezza*

*Area del rettangolo = (misura della base) x (misura dell'altezza)*

(rispetto all'unità  $Q$ , che è il quadrato di lato l'unità lineare prescelta  $u$  sia per misurare la base che per misurare l'altezza)

E se cambiamo unità di misura?

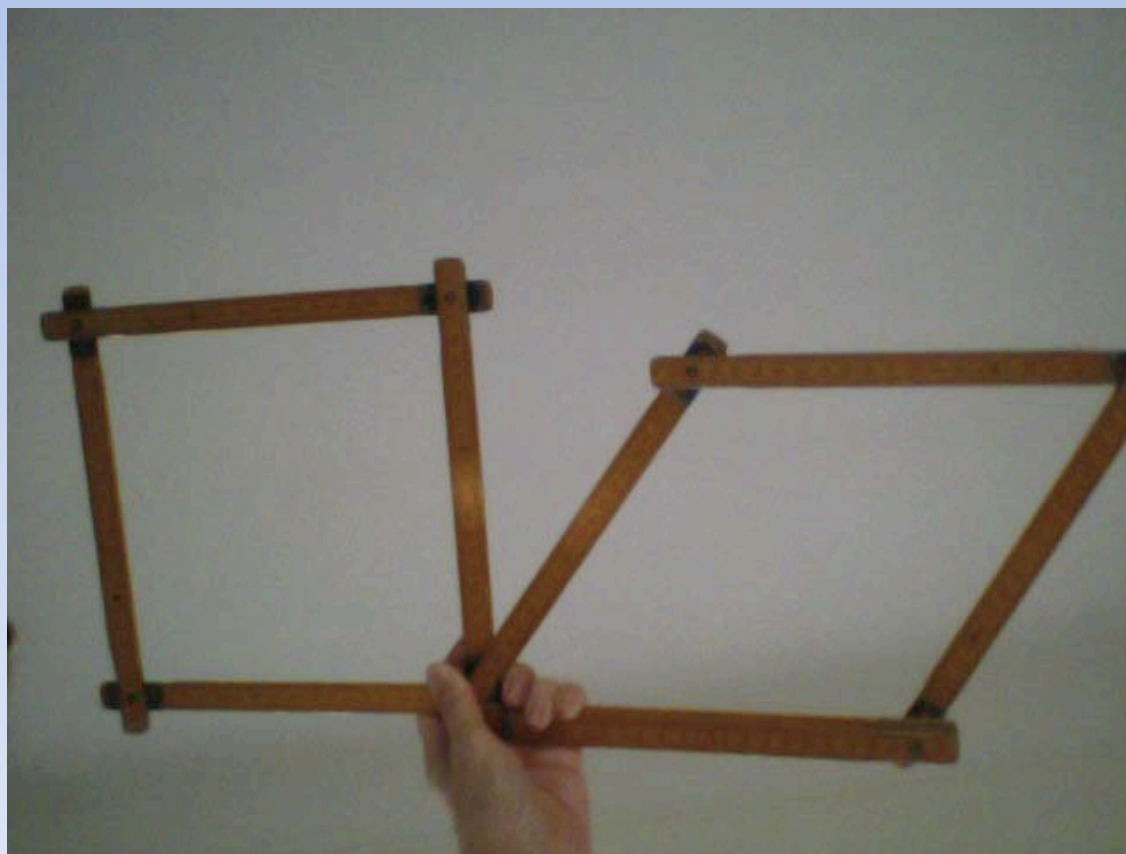
- Misura del perimetro del rettangolo = ...

# Importanza del laboratorio secondo EMMA

- *"Obiettivo principale del corso di Geometria intuitiva è suscitare, attraverso l'osservazione dei fatti riguardanti la tecnica, l'arte e la natura, l'interesse dell'alunno per le proprietà fondamentali delle figure geometriche e, con esso, il gusto e l'entusiasmo per la ricerca. Questo gusto non può nascere, credo, se non facendo partecipare l'alunno nel lavoro creativo. E' necessario animare la naturale e istintiva curiosità che hanno i ragazzi dagli 11 ai 14 anni accompagnandoli nella scoperta delle verità matematiche, trasmettendo l'idea di averlo fatto per se stessi e, dall'altra parte, far sentite progressivamente la necessità di un ragionamento logico".*

Emma Castelnuovo, *Geometria intuitiva*, La Nuova Italia, Firenze, 3 edizione, 1959, p. VII

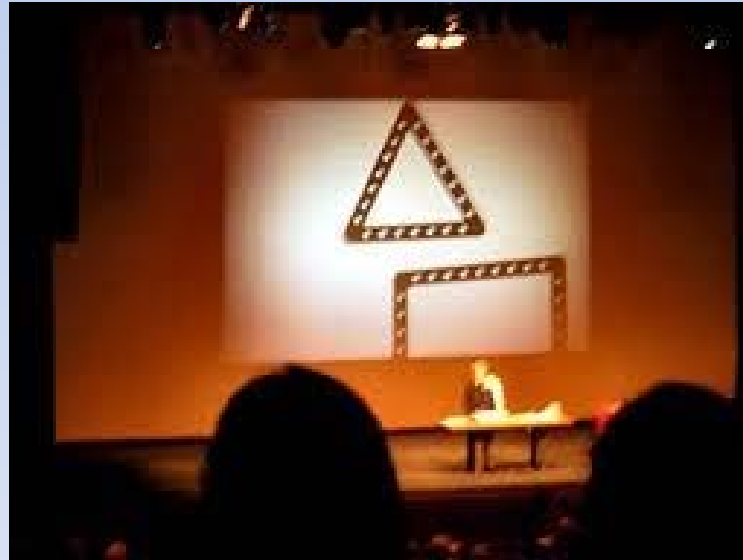
Emma Castelnuovo suggerisce l'uso di “materiale povero”, come il *metro snodabile*, che permette di confrontare, ad esempio, diagonali, angoli, area di rombo e quadrato.



Giuliana Gnani, isoperimetria ed  
equiestensione, 6 marzo 2013

Ho capito che la costruzione di figure geometriche  
va fatta con un materiale, un qualcosa che si  
maneggia, che si fa e si disfa..

Emma Castelnuovo , 2008



Giuliana Gnani, isoperimetria ed  
equiestensione, 6 marzo 2013

In questa presentazione sono state utilizzate attività svolte nella SSIS-classe A059 da parte delle prof.sse Angela Balestra, Michela Bertazzini, Elisa Giuliani, Erika Scabbia, Marica Tambara



**Un ringraziamento a tutti per la vostra  
partecipazione**